ΣΥΝΘΗΚΕΣ CAUCHY-RIEMANN - ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΖΗΓΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Νδο $f(z) = 2z - iz^2$ παραγωγίσιμη (ή ολόμορφη) στο $\mathbb{C}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $z = x+iy$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = 2(x+iy) - i(x+iy)^2 = \underbrace{(2x+2xy)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2y - x^2 + y^2)}_{v(x,y)}$$

Έπειτα,

$u_x = 2+2y$, $u_y = 2x$, $v_x = -2x$, $v_y = 2+2y$

Δηλ. ισχύει:

$u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ ← Συνθήκες Cauchy-Riemann

Άρα, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ (ή ολόμορφη)

2) Να βρεθούν όλα τα σημεία (αν υπάρχουν) της μιγαδικής συνάρτησης $f(z) = |z|^2 \cdot \bar{z} - z^3$ στα οποία είναι παραγωγίσιμη (δηλ. τα ομαλά σημεία)

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε αν υπάρχουν σημεία όπου η f παραγωγίσιμη

Έστω $z = x+iy$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = |x+iy|^2 \cdot (x-iy) - (x+iy)^3 = \underbrace{4xy^2}_{u(x,y)} - \underbrace{4x^2y}_{v(x,y)}i$$

Έπειτα,

$u_x = 4y^2$, $u_y = 8xy$, $v_x = -8xy$, $v_y = -4x^2$

Έτσι οι συνθήκες των Cauchy-Riemann ισχύουν:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 4x^2+4y^2=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$$

&

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow 0=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Άρα, η f παραγωγίσιμη <u>μόνο</u> στο σημείο $z_0=0+0i=0$.
Συνεπώς, αφού η f δεν είναι ολόμορφη στο z_0 (δηλ. δεν είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του z_0 παρά μόνο στο z_0) τότε η f δεν θα έχει κανένα ομαλό σημείο.

3) Να εξετασθεί αν η $f(z)=\begin{cases} \frac{z^2}{\bar{z}}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$ είναι ολόμορφη ή παραγωγίσιμη

<u>ΛΥΣΗ</u>

$z\neq 0, \quad z=x+iy, \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Τότε, $f(z)=\dfrac{(x+iy)^2}{x-iy}=\dfrac{(x^2+2ixy-y^2)(x+iy)}{x^2+y^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z)=\underbrace{\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}}_{u(x,y)}+i\cdot\underbrace{\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}, \quad (x,y)\neq(0,0).$$

$$u_x=\ldots=\frac{x^4-3y^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y=\ldots=-\frac{8x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x=\ldots=\frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y=\ldots=\frac{3x^4-y^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Ελέγχουμε για ποια $(x,y)\neq(0,0)$ ισχύουν οι συνθήκες των Cauchy - Riemann.

$u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$.

• Η $1^{η}$ γράφεται:

$x^4-3y^4+6x^2y^2 = 3x^4-y^4-6x^2y^2 \Leftrightarrow x^4+y^4-6x^2y^2=0$ ①

• Η $2^{η}$ γράφεται:

$-8x^3y = -8xy^3 \Leftrightarrow xy(y^2-x^2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $y=0$ ή $y^2=x^2$ ②

i. Για $x=0$ η ① γίνεται: $y^4=0 \Rightarrow y=0$ (↯) Απορ.

ii. Για $y=0$ η ① γίνεται: $x^4=0 \Rightarrow x=0$ (↯) Απορ.

iii. Για $y^2=x^2$ η ① γίνεται: $x^4+x^4-6x^4=0 \Rightarrow x=0$

και τότε $y^2=0 \Rightarrow y=0$ (↯) Απορ.

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη και κατά συνέπεια δεν είναι ολόμορφη σε οποιοδήποτε $z\neq0$.

Κατά συνέπεια (αφού f όχι ολόμορφη) τότε f δεν θα είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του $z_0=0$ άρα f όχι ολόμορφη στο $z_0=0$.

Το μόνο που μας έμεινε είναι να εξετάσουμε αν f παραγωγίσιμη στο $z_0=0$ (μέσω του ορισμού)

$$\lim_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to0}\frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to0}\frac{z^2/\bar{z}}{\cancel{z}} = \lim_{z\to0}\frac{z}{\bar{z}}$$

όπου το όριο αυτό δεν υπάρχει

<u>Απόδειξη</u>

Εστω $z_n = \frac{1}{n} + i0$, $n=1,2,\ldots$ με $z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0 i}{\frac{1}{n} + 0 \cdot i} = 1$$

Εστω $z_n' = 0 + i\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ με $z_n' \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n') = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - i\frac{1}{n}}{0 + i\frac{1}{n}} = -1$$

Αρα, $\nexists \lim_{z\to 0} f(z)$

Ετσι, λοιπόν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = 0$.

4) Να βρείτε τις ολόμορφες συναρτήσεις με πραγματικό μέρος $u(x,y) = 2xy - 2x$ και να τις εκφράσετε συνάρτηση του μιγαδικού z.

ΛΥΣΗ

Καταρχάς $u_x = 2y - 2$, $u_y = 2x$, $u_{xx} = 0$, $u_{yy} = 0$

ώστε $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u$ αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ τις $\Rightarrow u, v$ αρμονικές στο $\mathbb{R}^2$

Έτσι η συζυγής-αρμονική συνάρτηση v της u πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann.

$u_x = v_y$ & $u_y = -v_x \Leftrightarrow v_x = -2x$ & $v_y = 2y - 2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} = -2x}_{①} \quad \& \quad \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 2}_{②}$$

ολοκληρώνουμε την ①:

$v(x,y) = -x^2 + g(y)$, $g(y)$: παραγ. συναρτ. του y.

Επειτα παραγωγίζουμε ως προς y

$\frac{\partial v}{\partial y} = g'(y)$ και αντικαθιστώντας στη ②, έχουμε:

$g'(y) = 2y - 2 \Rightarrow g(y) = y^2 - 2y + c$, c: σταθερα αυθαίρετη

Αρα, $v(x,y) = -x^2 + y^2 - 2y + c$.

Συνεπώς,

$$\boxed{f(z) = (2xy - 2x) + i(-x^2 + y^2 - 2y + c)}$$

Τωρα, για να εκφράσουμε την $f(z)$ συναρτήσει του z χρησιμοποιούμε απλώς τις σχέσεις:

$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ & $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Αντικαθιστούμε και έπειτα απο υπολογισμους:

$$\boxed{f(z) = -iz - 2z + ic}$$

5) Αν $u(x,y) = \frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1}$, να βρείτε που είναι αρμονική και στη συνέχεια να βρείτε την $v(x,y)$ ωστε η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ολόμορφη

ΛΥΣΗ

$$u(x,y) = \frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1} = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}, \quad ①$$

Εάν $z = x+iy \xRightarrow{z-1=(x-1)+iy} |z-1|^2 = (x-1)^2+y^2$.

με $x-1 = \dfrac{(z-1)+(\overline{z-1})}{2}$

Άρα, ①: $u(x,y) = \dfrac{(z-1)+(\overline{z-1})}{2|z-1|^2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\overline{z-1}} + \dfrac{1}{z-1}\right] = Re\,\dfrac{1}{z-1}$

Επιλέγοντας, $v(x,y) = \dfrac{1}{2i}\left[-\dfrac{1}{\overline{z-1}} + \dfrac{1}{z-1}\right] = Im\,\dfrac{1}{z-1}$

τότε, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = \dfrac{1}{z-1}$ ολόμορφη $\forall z \neq 1$

Επίσης, η $u(x,y)$ αρμονική $\forall\ z \neq 1$ όντας πραγματικό μέρος ολόμορφης συνάρτησης.

6) Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία z στο $\mathbb{C}$ ώστε η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2|z|^2+iz}{1+|z|^2}$ να παραγωγίζεται. Ποιες οι παράγωγοι σε αυτά;

ΛΥΣΗ

ισοδύναμη σχέση με τις συνθήκες Cauchy-Riemann είναι

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} f = 0 \Rightarrow \frac{2z(1+z\bar z) - (2z\bar z + iz)z}{(1+z\bar z)^2} = \frac{z(2-iz)}{(1+z\bar z)^2} = 0$$

$\Rightarrow z=0$ ή $z=-2i$ (ενδέχεται να παραγωγίζεται σε αυτά)

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = i \quad \text{και} \quad \lim_{z\to -2i} \frac{f(z)-f(-2i)}{z+2i} = \dots = \frac{i}{5}.$$

7) Αν $f: D \to \mathbb{C}$, D τόπος και f ολόμορφη στο D τότε

νδο

i. $Re(f) = σταθ \Rightarrow f = σταθ.$

ii. $|f| = σταθ \Rightarrow f = σταθ.$

ΛΥΣΗ

i. Εστω $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$u(x,y) = σταθ = Re(f) \Rightarrow u_x = u_y = 0$

Αλλά, f ολομορφή $\xRightarrow{C-R} v_x = v_y = 0$, $\forall z \in D$.

Τότε, $f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = σταθ$, $\forall z \in D$.

ii. Εστω $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Τότε $|f(z)| = u^2 + v^2 = σταθ = c \Rightarrow u^2 + v^2 = c$, $\forall z \in D$.

- Για $c = 0 \rightsquigarrow u = 0 = v$ (άμεσο συμπέρασμα)
- Για $c \neq 0 \rightsquigarrow u^2 + v^2 = c \xRightarrow{\text{Παραγωγ.}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0 \\ u \cdot u_y + v \cdot v_y = 0 \end{cases} \overset{C-R}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} u \cdot u_x - v u_y = 0 \\ u u_y + v u_x = 0 \end{cases} \text{γραμ. συστημα}$$

$$Det = \begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 \neq 0 \quad (\text{ομογενές})$$

Μοναδική λυση η $u_x = u_y = 0 \Leftrightarrow u = σταθ$

απο (i) $v = σταθ$ και αρα $f(z) = σταθ.$

8) Εστω D τόπος και $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

Νδο $\bar{f}$ ολόμορφη $\Leftrightarrow$ f σταθερά συνάρτηση

ΛΥΣΗ

Εστω f σταθερά συνάρτηση $\Rightarrow$ $\bar{f}$ σταθερά συνάρτηση

$\Rightarrow$ $\bar{f}$ παραγωγίσιμη στο D $\Rightarrow$ $\bar{f}$ ολόμορφη

Αντίστροφα,

Εστω $f, \bar{f}$ ολόμορφες $\xRightarrow{f=u+iv}$ $f-\bar{f} = 2iv$ ολόμορφη

$\Rightarrow$ $Re(f-\bar{f}) = 0$ $\xRightarrow{Ασκ 7}$ $f-\bar{f} = σταθ = 2iv \Rightarrow \boxed{v = σταθ}$

Άρα $v_x = v_y = 0$ $\xRightarrow[C-R]{f \text{ ολομ.}}$ $u_x = u_y = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = σταθ, \ \forall z \in D$.

Ασκηση / Εργασία:

Νδο η $f(z) = \sqrt{|xy|}$ ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο $z=0$. Υπάρχει η $f'(0)$;

ΑΣΚΗΣΗ

α) Να προσδιορίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση:

$$f(z) = \cosh x(\cos y + a\sin y) + i\sinh x(\cos y + b\sin y)$$

να είναι ολόμορφη

β) Να εξετασθεί σε ποια σημεία η συνάρτηση

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + |y|)$$

είναι ολόμορφη

γ) Εξετάστε εάν οι συναρτήσεις $f(z) = \bar{z}$ και $g(z) = z\,\mathrm{Im}(z)$ είναι ολόμορφες

ΛΥΣΗ

α) f ολόμορφη $\Rightarrow$ Ισχύουν οι συνθήκες των Cauchy-Riemann

Έστω $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$, τότε

• $u_x = v_y \Rightarrow \cancel{\sinh x}(\cos y + \alpha\sin y) = \cancel{\sinh x}(-\sin y + b\cos y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y + \sin y + \alpha\sin y - b\cos y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+\alpha)\sin y + (1-b)\cos y = 0$ ①

• $u_y = -v_x \Rightarrow \cancel{\cosh x}(-\sin y + a\cos y) = -\cancel{\cosh x}(\cos y + b\sin y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y - \sin y + \alpha\cos y - b\sin y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y - \sin y + \alpha\cos y + b\sin y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+\alpha)\cos y + (b-1)\sin y = 0$ ②

Από ① και ② πρέπει $1 - b = 0 = a + 1 \Leftrightarrow b = 1$ & $a = -1$

β) αν $f(z) = u + iv$ τότε

$u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ και $v(x,y) = 2xy + |y|$

Η f ολόμορφη $\Rightarrow$ Πληρούνται οι συνθήκες C-R.

$u_x(x,y) = 2x+1$ & $u_y(x,y) = -2y$ & $v_x(x,y) = 2y$

$$v_y(x,y) = \begin{cases} 2x+1, & y>0 \\ 2x-1, & y<0 \end{cases}$$ ← Απορ. στο εξής πρόβλημα

Προφανώς η μερική παράγωγος στο $y=0$, $x \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχει. Αυτό αποδεικνύεται είτε με τον ορισμό της μερικής παραγώγου είτε ← Διαφορετικά τα με το εξής σχόλιο:

"Εφόσον $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε και η $v(x,y) = 2xy + |y|$ δεν θα παραγωγίζεται στο $y_0 = 0$ μερικώς"

Έτσι λοιπόν $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, $\forall z \in \mathbb{C}, y>0$

(u_x, u_y, v_x, v_y συνεχώς διαφορίσιμες)

Έτσι, f ολόμορφη αν $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}, y>0$

γ) Εφαρμογές (Λύστε το πιο αναλυτικά)

Σχόλια: 1) f προφανώς όχι ολόμορφη άρα $u_x \neq v_y$

2) Για τη g ισχύουν οι συνθήκες C-R αν $x=y=0$

Η g παραγωγίσιμη στο 0 αλλά f όχι ολόμορφη στο 0 διότι δεν παραγωγίζεται σε μια περιοχή του $B(0,\varepsilon)$ με $\varepsilon>0$ αντίθετα της συμμ. περιοχής